

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 8

SoSe 2015

09./10.06.2015

[P21] Bindungszustände im Delta-Potential

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im Potential

$$V(x) = -W \delta(x) \quad \text{mit} \quad W > 0.$$

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Anschlussbedingung

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)) = -\frac{2mW}{\hbar^2} \psi(0).$$

Hierbei bezeichnet $\psi'(x)$ die Ortsableitung der stetigen (?) Wellenfunktion.

Hinweis: Integrieren Sie die Schrödingergleichung mit $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx$.

(b) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte $E_n < 0$ und die normierten Wellenfunktionen der Bindungszustände.

(c) Zeigen Sie explizit die Gültigkeit der Unschärferelation.

[P22] Ritzsches Variationsverfahren

Eine Näherungsmethode zur Berechnung der Energie des Grundzustandes eines quantenmechanischen Systems, das durch den Hamiltonoperator H beschrieben wird, ist das sogenannte Ritzsche Variationsverfahren. Hierbei wird das Energiefunktional

$$E[\phi] := \langle \phi | H | \phi \rangle = \int dx \phi^*(x) H \phi(x)$$

durch Variation des normierten Zustandes $|\phi\rangle$ bzw. $\langle \phi|$ minimiert. Der entscheidende Aspekt dieses Verfahrens ist das Auffinden einer "guten" *trial function* $\phi(x)_{\alpha, \beta, \dots} = \langle x | \phi_{\alpha, \beta, \dots} \rangle$, die im Allgemeinen von mehreren Parametern α, β, \dots abhängt.

Bestimmen Sie näherungsweise die Grundzustandsenergie des Hamiltonoperators des harmonischen Oszillators (Ortsdarstellung),

$$H \doteq -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2,$$

durch Minimieren des Energiefunktionals $E[\phi]$. Verwenden Sie dazu die *trial function* und deren Variation

$$\phi_\alpha(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|}, \quad \delta\phi_\alpha(x) = \partial_\alpha \phi_\alpha(x).$$

Überprüfen Sie zu Beginn, ob $\phi_\alpha(x)$ normiert ist. Vergleichen Sie das Ergebnis der Näherung mit der exakten Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass H nicht von α abhängt.